



**Prof. Dr.-Ing. Martin Seilmayer**

schloss 2010 das Studium der Elektrotechnik im Bereich Feinwerk- und Mikrotechnik an der Technischen Universität Dresden als Dipl.-Ing. ab. Danach arbeitete er am Helmholtz-Zentrum Dresden-Rossendorf in der Abteilung für Magneto hydrodynamik. Hier gelang es ihm, den Drehimpulstransport in der Rotationsströmung von elektrisch leitfähigen Fluiden in Verbindung mit magnetischen Feldern experimentell nachzuweisen. Zum Thema "magneto hydrodynamische Instabilitäten in Flüssigmetallen" wurde er mit summa cum laude promoviert. Im Jahr 2020 wechselte er als Systemarchitekt zu einem mittelständischen Unternehmen und brachte dort seine Expertise in Signalanalyse, Messtechnik und Mustererkennung ein. Während seiner Forschung betreute er zahlreiche Graduiierungsarbeiten und sammelte Erfahrungen in der akademischen Lehre. Seit Juni 2023 ist er an der Berufsakademie Sachsen (jetzt: Duale Hochschule Sachsen), am Standort Bautzen und seit 1.9. 2023 als berufener „Professor für Ingenieurwissenschaftliche Grundlagen“ und verstärkt den Studiengang Elektrotechnik.

**Kontakt:** martin.seilmayer@dhsn.de

# Eine kleine Systemtheorie – Elektromechanische Analogien

Martin Seilmayer

**Abstract**

In zahlreichen Ingenieursdisziplinen wird die Netzwerkanalyse eingesetzt, um Systeme wie beispielsweise elektrische Schaltungen, hydraulische Anlagen, pneumatische Systeme und mechanische Schwinger zu modellieren. Dieser Ansatz ermöglicht eine fundierte numerische oder analytische Bauteilauslegung, Parameteroptimierung und eine Analyse des Energieflusses. Der Artikel gibt einen kompakten Überblick über die grundlegenden Methoden zur Modellbildung und Berechnung mithilfe konzentrierter Elemente und veranschaulicht deren Anwendung in verschiedenen physikalischen Domänen. Ein Fokus liegt auf der Entwicklung elektromechanischer Analogien, die eine Übertragung von Lösungsansätzen zwischen unterschiedlichen Disziplinen erlauben. Hierbei wird insbesondere auf die Modellierung mechanischer Systeme anhand elektrotechnischer Methoden eingegangen. Dieser Artikel fasst zentrale Inhalte der Antrittsvorlesung des Autors zusammen und beleuchtet die Anwendungsmöglichkeiten und Grenzen der Netzwerkanalyse in ingenieurwissenschaftlichen Fragestellungen.

Network analysis is widely used in various engineering disciplines to model systems such as electrical circuits, hydraulic installations, pneumatic systems, and mechanical oscillators. This approach enables well-founded numerical or analytical component design, parameter optimization, and energy flow analysis. This article provides a concise overview of fundamental methods for modeling and calculation using lumped elements and illustrates their application in different physical domains. A particular focus is placed on the development of electromechanical analogies, which facilitate the transfer of solution approaches between different disciplines. Special attention is given to the modeling of mechanical systems using electrical engineering methods. This article summarizes key aspects of the author's inaugural lecture and examines the possibilities and limitations of network analysis in addressing engineering challenges.

**1. Kurze Einführung in die physikalische Modellbildung**

Ursprünglich wurden Analogiebetrachtungen verwendet, um elektrische Phänomene zu beschreiben, noch bevor die Methodik der Netzwerkanalyse vollständig entwickelt war. Bereits im 19. Jahrhundert nutzte C. J. Maxwell solche Analogien erfolgreich. Später stellte sich heraus, dass mit Hilfe von Netzwerkanalyse-Methoden wie dem Kirchhoff'schen Knoten- und Maschensatz auch komplexe Probleme aus anderen physikalischen und technischen Bereichen modelliert

werden können. Ein Meilenstein war die Entwicklung der Theorie elektrischer Netzwerke durch Kirchhoff und Helmholtz und die Einführung linearer Näherungen zur vereinfachten Beschreibung technischer Anforderungen. Eine grundlegende Zusammenfassung dieser Analyse- und Syntheseverfahren wurde erstmalig von Cauer in seinem Werk "Theorie der linearen Wechselstromtechnik" (Cauer 1954) dargestellt. Gleichzeitig entwickelte sich die Signal- und Systemtheorie für lineare Systeme, die erstmalig von Küpfmüller 1952 veröffentlicht wurde.

Im Zentrum der Systemtheorie steht das Konzept der konzentrierten Elemente, die als punktuelle „Blackboxen“ für Bauteile dienen. Diese Elemente modellieren näherungsweise das physikalische Verhalten. Ein Beispiel: Typischerweise wird die räumliche Ausdehnung eines massebehafteten Körpers auf den Schwerpunkt – also einen einzigen Punkt – reduziert, bei dem die Reaktionen auf Beschleunigungs- und Trägheitskräfte betrachtet werden. Für Effekte wie Rotation und Verformung sind hingegen komplexere Modelle erforderlich, da diese von Form, Lage und Trägheitsmomenten abhängen. Ein weiteres Beispiel wäre der elektrische Widerstand eines elektrisch leitfähigen Körpers. Er wird ebenfalls auf einen linearen Zusammenhang  $R=U/I$  reduziert. Die exakte räumliche Leitfähigkeitsverteilung spielt für das konzentrierte Element keine Rolle mehr.

Konzentrierte Elemente lassen sich zudem zu Netzwerken verbinden, etwa in Form elektrischer Schaltungen, hydraulischer Netze, Wärmeübertragungssysteme oder akustischer Strukturen. Jedes Element besitzt Eingangs- und Ausgangsgrößen, die als Transport- oder Flussgrößen sowie Potentialgrößen im Sinne eines Gradienten beschrieben werden können. Üblicherweise werden konzentrierte Elemente als Zwei- oder Vierpole dargestellt.

Der Quotient aus Potential- und Flussgröße definiert das charakteristische Verhalten eines Elements, wie es z. B. der elektrische Widerstand  $R=U/I$  verdeutlicht. Hier stellt die Spannung  $U$  die Potentialgröße (als Gradient des elektrischen Feldes) dar, und der Strom  $I$  dient als Flussgröße.

#### Weitere Beispiele

Eng verwandt mit den elektrischen Netzwerken sind thermische Zusammenhänge, die ebenso als Netzwerk konzentrierter Elemente modelliert werden können. Der thermische Widerstand  $R_{th}=\Delta\theta/\dot{Q}_{th}$  wird als Quotient aus Temperaturdifferenz  $\Delta\theta$  (thermisches Potential) und Wärmefluss  $\dot{Q}$  aufgefasst.

Als Beispiel aus der Mechanik sei eine Federwirkung,  $d^{-1}=\Delta x/F$  angeführt. Dabei ist  $d$  die Federkonstante,  $F$  die Kraft (Flussgröße) und  $\Delta x$  die Wegdifferenz (Potentialgröße).

#### Leistung und Energie

Es ist sinnvoll, die Potential- und Flussvariablen in einem Netzwerk aus konzentrierten Elementen so zu wählen, dass sich die Leistung, bzw. Energie, in dem betrachteten physikalischen System aus dem Produkt aus Potentialgröße und Flussgröße ergeben. Die gewählten Variablen sind leistungskonjugiert. Also  $P_{el}=U \cdot I$  für elektrische Elemente oder auch  $P_{mech}=F \cdot v$  (bzw.  $W_{mech}=F \cdot \Delta s$ ) für die mechanischen Domäne.

#### 1.1 Bedingungen für die Anwendung konzentrierter Elemente

Damit konzentrierte Elemente in einem topologischen Netzwerk zur Anwendung kommen können, müssen bestimmte Bedingungen gelten:

##### Topologische Konsistenz

Das vorliegende Problem kann in unabhängige und diskrete, also verteilte, Elemente zerlegt werden, welche über Verbindungen Informationen (Flussgröße) austauschen. Beispiele sind elektrische Schaltpläne, gekoppelte mechanische Anordnungen oder hydraulische Netze, in denen sich die unterschiedlichen Funktionen, Wirkungsweisen oder Effekte als unabhängige Bauteile darstellen lassen.

##### Charakteristische Länge

Die charakteristische physikalische Ausdehnung  $L_c \ll \lambda$  als eindimensionale Länge von konzentrierten Elementen ist viel kleiner als die Wellenlänge (elektromagnetische Welle, Schall-Welle, usw.) des betrachteten Phänomens. Als Faustregel sollte das Verhältnis  $L_c/c < 0.2$  sein. Beispiel: Ein Prozessor (Intel Core i7-980X) hat einen maximalen internen Takt von 3.6 GHz. Damit der Systemtakt überall als synchron gelten kann, darf die typische Größe des Chips

$$L_c < 0.2 \cdot \frac{\lambda}{c \cdot f} < 16.7 \text{ mm}$$

sein. Laut Datenblatt beträgt die Chipfläche  $A = 248 \text{ mm}^2$ , was in etwa einer (quadratischen) Kantenlänge von 15.75 mm entspricht.

##### Linearität

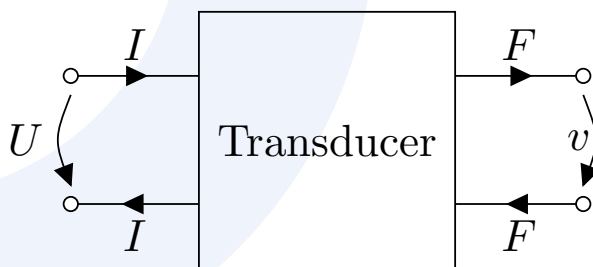
Der Zusammenhang zwischen Potential- und Flussgröße ist linear, oder lässt sich entsprechend linearisieren. Komponenten, die sich als gewöhnliche Differentialgleichung darstellen lassen, werden durch eine Laplace-Transformation linearisiert. Alle Methoden der elektrischen Netzwerkanalyse können dann weiterhin angewendet werden. Als Beispiel kann die elektrische Spule mit der Induktivität  $L$  benannt werden. Das Klemmenverhalten lässt sich durch die Differentialgleichung  $U(t) = L \cdot dI/dt$  beschreiben. Im Laplace-Raum entspricht dies  $\mathcal{L}(U(t)) = s \cdot L$ , dem linearen Produkt von  $s$  mit der Induktivität. Bei diesem mathematischen Verfahren, hier durch den linearen Operator  $\mathcal{L}(\cdot)$  der Laplace-Transformation gekennzeichnet, werden unter anderem alle Differentialoperatoren ( $d/dt \rightarrow s$  und  $\int dt \rightarrow 1/s$ ) durch die komplexwertige Variable  $s = \delta + j\omega$  entsprechend ersetzt (Doetsch 1976; Lunze 1991), mit  $\omega = 2\pi f$  als Signalfrequenz. Die Konstante  $j = \sqrt{-1}$  steht für die komplexe Einheit. Ein System aus Differentialgleichungen lässt sich so als lineares Gleichungssystem umformulieren und ist nun einfacher zu lösen als das System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Alle gewählten Komponenten entsprechen dabei den Anforderungen eines „linearen zeitinvarianten“ (LTI) Systems, siehe hierzu bspw. Hoffmann 1998.

**Kirchhoff'sche Regeln**

Die Kirchhoff'schen Regeln gelten sowohl im Zeitbereich als auch im transformierten Laplace-Raum sinngemäß. An einem Knoten ist die Summe aller Flussgrößen null (Knotensatz) und in einer Masche (geschlossener Pfad) sind die Potentialgrößen null. (siehe dazu Lunze 1991)

**Kopplung zwischen Domänen**

Mit Hilfe von 4-Polen oder entsprechenden Ersatzschaltbildern (Netzwerken) bestehend aus konzentrierten Elementen, lassen sich auch unterschiedliche Domänen koppeln. Auf diese Weise werden Sensoren und Aktoren modelliert, bei denen eine Energieumformung stattfindet. Prominente Beispiele sind Drucksensoren, Ultraschallwandler, Lautsprecher, Stoßdämpfer, elektrische (Peltier-) Kühlsysteme uvm.



a) 4-Pol Bild eines Elektromagnetischen Umformers

$$\begin{bmatrix} U \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ F \end{bmatrix}$$

b) Matrixdarstellung

Abbildung 1: Beispiel eines Transducer-Schemas

**Grenzen der Methode und Übergang zur FEM**

Wenn die möglichen Komponenten nicht ideal sind, also  $L_c \approx \lambda$  oder sich die Stoffeigenschaften, Fluss- und Potentialgrößen räumlich nicht homogen verteilen (Dichte-, Leitfähigkeitsverteilungen, usw.), so ist es oft hilfreich, die geometrische Domäne, bspw. die „Einzelkomponente“, aus mehreren Teilen zusammensetzen. Diese Zerlegung führt schließlich zu einem Netzwerk „Finiter Elemente“, welche so klein sind, dass jedes einzelne wieder als lineares konzentriertes Element gerechnet werden kann.

Eine prominente Anwendung der Finite Elemente Methode (FEM) sind die mechanischen Probleme, in denen die Verformung von Körpern als Reaktion auf Kräfte interessiert. Hier sei der „Biegebalken“ als typisches Beispiel für eine Kräfteinwirkung auf einen Balken angeführt. Die Lösung gelingt, indem die Geometrie in ein Netzwerk von konzentrierten Elementen zerlegt wird. Jedes dieser Gitterelemente wird durch einfache Gleichungen beschreiben (z. B. Hook'sches Gesetz)

und interagiert mit allen benachbarten Elementen. Die Lösung eines solchen Netzes (Gleichungssystems) von konzentrierten Elementen erfolgt meist numerisch, also iterativ, mithilfe spezieller Algorithmen. Eine analytische Lösung durch Netzwerkanalyse gelingt nur noch in wenigen Fällen.

Sind die Elementeigenschaften von weiteren Variablen abhängig, z. B. Zeit  $t$ , Ort  $\vec{x}$ , Temperatur  $\vartheta$ , bzw. nicht linear oder implizit gegeben, so gelingt die Berechnung derart komplexer Netzwerke nur noch iterativ mithilfe einer Simulation. Bekannte Softwarepakete heißen: ANSYS, COMSOL, NASTRAN, Elmer, Z88, welche auch die Verknüpfung von verschiedenen Physikdomänen miteinander zulassen. Ein klassisches Beispiel ist die erzwungene Konvektion an Kühlkörpern, bei welcher der Wärmetransport in Verbindung mit einer Fluidströmung beschrieben werden muss. FEM als Methode ist hier nicht weiter Gegenstand.

**2. Elektromechanische Analogien**

Für die Entwicklung einer Analogie werden Variablen in einer Domäne (bspw. „Elektrotechnik“) benötigt, deren mathematische Form der Komponenten mit der einer anderen Domäne, bspw. „Mechanik“, identisch sind. Dabei gibt es meist mehrere Möglichkeiten die Analogie zu definieren. Ziel ist es, die erprobten Methoden und Lösungen der einen Domäne auf Systeme einer anderen zu übertragen.

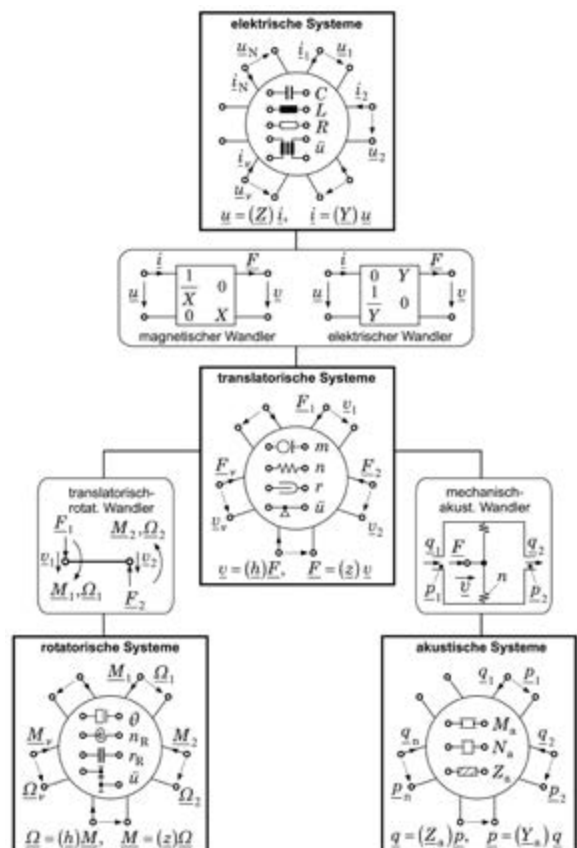


Abbildung 2: Systematik der Netzwerkelemente (aus: Ballas, Pfeifer & Werthschützky 2009)

	Mechanisch		Akustisch	Elektrisch
	Translatorisch	Mechanisch		
Flussgröße	Kraft	Drehmoment	Druck	Strom
Potentialgröße	Geschwindigkeit	Drehzahl	Volumenstrom	Spannung

Tabelle 1: Beispiel von Mobilitätsanalogien  $F \sim v$ , (Auszug nach Ballas, Pfeifer, und Werthschützky 2009; Busch-Vishniac 1999)

Eine Systematik der möglichen Domänen ist in Abbildung 2 gegeben. Hier sind jeweils die reduzierten Komponenten, wie zum Beispiel „Widerstand“ (R), „Dämpfer“, usw., und die dazugehörigen Potential- und Flussgrößen dargestellt.

Für die weiteren Betrachtungen wird die elektrische Domäne als Referenzsystem gewählt. Grundsätzlich gibt es verschiedene Analogieklassen: (i) die Impedanzanalogie (auch Maxwell-Analogie), in der Kraft und Spannung,  $F \leftrightarrow U$ , analog wirken. Hier sind die mechanische, akustische und elektrische Impedanz vergleichbar, aber nicht die Netzwerktopologie. Das mechanische Netzwerk ist anders angeordnet als die elektrisch analoge Schaltung. Bei der (ii) Mobilitätsanalogie (Firestone-Analogie), wirken die mechanische Kraft und der elektrische Strom  $F \leftrightarrow I$  ähnlich. Hierbei bleiben Netzwerktopologien erhalten. Allerdings sind beim Energieaustausch zwischen zwei Domänen (also Aktoren und Sensoren) die nötigen Impedanzen nicht mehr vergleichbar. Es gibt noch weitere Klassen, die aber nur eine untergeordnete Rolle spielen. Weiterführende Beispiele und Ausführungen sind in Ballas, Pfeifer, und Werthschützky 2009; Lenk, Pfeifer, und Werthschützky 2001 beschrieben.

### 3. Feder-Masse-Schwinger

Anhand eines einfachen Beispiels, dem Feder-Masse-Schwinger, soll die Vorgehensweise der Netzwerkberechnung mit elektromechanischen Analogien exemplarisch aufgezeigt werden. Ziel ist es ein Netzwerk von Komponenten, also eine Art Schaltung, zu erstellen, daraus ein System von Differentialgleichungen abzuleiten, und schließlich das Frequenzverhalten zwischen Anregung und Systemreaktion zu skizzieren.

Damit die Verschiebung einer Masse  $m$  bezüglich ihrer Anregung betrachtet werden kann, wird die  $F \sim x$  Analogie gewählt. Das ist also ein System, in dem die Kraft  $F$  die Flussgröße und

der Ort  $x$  die Potentialgröße darstellt. Das Newton'sche Prinzip  $F_m(t) = m \cdot a(t)$  verknüpft dabei die Masse mit der wirkenden Kraft und kann schließlich als Differentialgleichung  $F_m(t) = m \cdot d^2 x(t)/dt^2$  bezüglich der Verschiebung  $x(t)$  dargestellt werden.

Im Ergebnis entstehen die für die Systemtheorie typischen Übertragungsfunktionen, welche das Verhältnis der Laplace-Transformierten  $Y(s)/X(s)$  zwischen Eingangsgröße, hier  $x(t)$  und Ausgangsgröße (Systemreaktion)  $y(t)$  beschreiben. Übertragungsfunktionen sind vom komplexen Parameter  $s = \delta + j\omega$  abhängig und im sogenannten Frequenzbereich (oder auch Laplace-Raum) definiert. Sie stehen im Zusammenhang mit der Laplace-Transformierten der zugehörigen – im Zeitbereich definierten – linearen Differentialgleichungen. Beispielsweise ließe sich die obengenannte DGL mithilfe der Laplace-Transformation durch eine line-

$$\mathcal{L}\left(m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t)\right) = s^2 \cdot m - \overbrace{\left(s \cdot x(t_0) + \frac{d}{dt} x(t)\right)}^{\text{Anfangsbedingung}} \Big|_{t_0} \quad (1)$$

are Gleichung, die nur noch von  $s$  abhängt, ausdrücken. Die Anfangsbedingungen sind in den meisten technischen Anwendungen null, so dass die letzten Terme entfallen und das Berechnen zusätzlich vereinfachen. Diese Vorgehensweise verkürzt die Berechnung für komplexe Verschaltungen enorm, da „nur“ lineare Gleichungssysteme gelöst werden müssen.

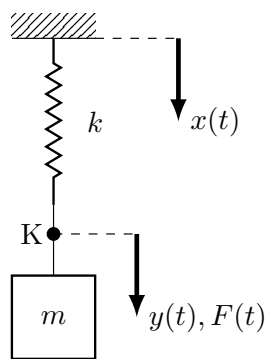
Die mechanischen Komponenten eines  $F \sim x$  Analogiesystems müssen nun durch passende mathematische Zusammenhänge ausgedrückt werden. Diese finden dann ihre Entsprechungen als elektrische Netzwerkelemente und können zu einem solchen Netzwerk zusammengesetzt werden. Folgende Tabelle skizziert die Korrespondenzen:

Mechanisch		Netzwerkelement		
Kraft		$F := f(t)$		Flussgröße
Weg		$x := g(t)$		Potentialgröße
Energie		$W_{mech} = \int F dx$		
Leitung		$P_{mech} = \frac{Fdx}{dt}$		
Dämpfer		$F_d = d \cdot \frac{d}{dt} x(t)$ $v(t)$		Entsprechend der Gleichung
Masse		$F_m = -m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t)$		Sinngemäß entspricht das einer gesteuerten Quelle
Feder		$F_d = k \cdot x(t)$		

Tabelle 2: Komponentenanalogien, Symbole und elektrische Analogie in der F-x Analogie

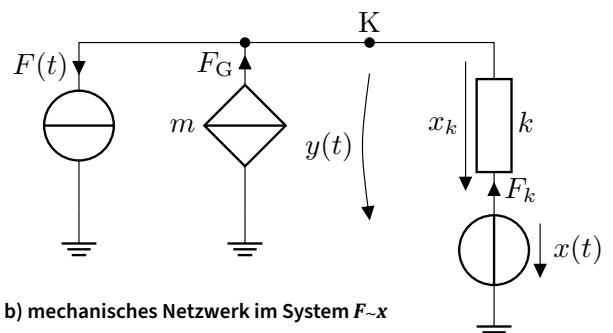
### 3.1 Ungedämpfter Feder-Masse-Schwinger

Das einfachste Netzwerk eines Feder-Masse-Schwingers besteht aus zwei Komponenten: dem Federelement mit der Federkonstanten  $k$ , beispielsweise einer Spiralfeder und der Masse  $m$ . Es handelt sich hier also um ein System ohne Dämpfung. Genauer gesagt wird von einem ungedämpften Feder-Masse-Schwinger gesprochen. Obwohl an dieser Stelle eine Rechnung mit einfachen physikalischen Grundkenntnissen möglich wäre, soll hier die Methode der elektromechanischen Analogien in Verbindung mit der Netzwerkanalyse aufgezeigt werden.



a) Physikalisches Schema

Die Verbindungsstelle zwischen Feder und Masse wird als „(Super-)Knoten“ ( $K$ ) bezeichnet. Hier werden mindestens zwei Kräfte balanciert, so dass die Knotengleichung erfüllt ist. Im Knoten gleichen sich die statische Gewichtskraft der Masse  $F_G$ , eine dynamische Kraft  $F(t)$  der Anregung sowie die rückstellende Federkraft  $F_k$  aus. Für die Analyse der Anordnung in Abbildung 3a werden nun zwei Ortskoordinaten eingeführt. Einmal am Knoten  $K$ . Hier entsteht die resultierende Verschiebung  $y(t)$  der Masse – eigentlich des Knotens im Sinne eines Knotenpotentials, mit positiver Zählrichtung nach unten. Die zweite Ortskoordinate  $x(t)$  startet an der festen Einspannung oben und zählt positiv nach unten. So kann eine Verschiebung der Halterung (oben) oder eine wirksame Kraft an der Masse als Anregung dienen.



b) mechanisches Netzwerk im System F-x

Abbildung 3: Feder-Masse-Schwinger, mit der Masse  $m$  und der Feder  $k$ . Die Quellen  $F(t)$  und  $x(t)$  regen das System an.

### Ruhezustand

Die Berechnung des Ruhezustandes dient zur Abklärung der Anfangswerte in Gleichung (1). Im vorliegenden Beispiel gilt für den Ruhezustand  $t_0=0$ , so dass

$$x(t_0) = x_0 = -y_0 \quad (2)$$

$$y(t_0) = 0 \quad (3)$$

gesetzt werden kann. Die y-Koordinate liegt dabei im Punkt K. Für das Lösen der Differentialgleichungen werden hier die Anfangs- und Randbedingungen wie folgt definiert:  $x(t_0) = x_0$  und  $y_0 = 0$ .

Für die Flussgröße im Ruhezustand gilt die folgende Knotengleichung:

$$F_G + F_k = 0 \quad (4)$$

$$m \cdot g = k \cdot x_0. \quad (5)$$

Die Feder erzeugt in der Ruhelage eine Kraft  $F_k = k \cdot x_0$ , welche der Gewichtskraft der Masse  $F_G = -m \cdot g$  entgegen wirkt. Der Wert  $x_0 = -y_0$  deutet an, dass die Feder aufgrund der Masse vorgespannt wird. Die Konstante  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  bezeichnet die Erdbeschleunigung.

In der Netzwerkanalyse gibt es Maschen, in denen sich die Summe der Potentialgrößen ausgleicht, also  $\sum_i x_i = 0$  gilt. Die Potentialgrößen  $x$  und  $y$  wechselwirken nun in der rechten Masche, siehe Abbildung 3b, so dass aus dem Maschensatz

$$y(t_0) = -x_k + x_0 \quad (6)$$

$$0 = -\frac{F_k}{k} + x_0 \quad (7)$$

die Länge  $x_0$  der vorgespannten Feder folgt. Das negative Vorzeichen  $-x_k$  entsteht dadurch, dass die Kraft entgegen der Zählrichtung der Feder wirkt, vergleiche Tabelle 2.

### Dynamische Analyse

Die dynamische Analyse entspricht im weitesten Sinne dem, was in der Elektrotechnik unter dem Stichwort „Kleinsignalanalyse“ verstanden wird. Im vorliegenden Fall bedeutet das, dass die Kraft  $F_m = F_G + F(t)$  sich aus zwei Komponenten, dem Ruhezustand (Arbeitspunkt) und der Änderung um diesen herum zusammensetzt. Für diese Analyse sind nur die Änderungsgrößen relevant. Üblicherweise werden die Variablen und die Netzwerkelemente Laplace-transformiert, so dass sich auch die Berechnungsvorschriften wie oben dargestellt ändern, also  $d/dt g(t) \rightarrow s \cdot G(s)$  usw.

$$(F_G + F(t)) + F_k - F(t) = 0 \quad (8)$$

$$-m \cdot \left( g + \frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + k \cdot (x_0 + x(t)) - y(t) = 0$$

Die Knotengleichung (4) lässt sich in einen statischen ( $x_0$ , usw.) und in einen dynamischen Anteil ( $y(t)$ ,  $(dx(t))/dt$ ) zerlegen. Für die dynamische Analyse werden nur die zeitlich veränderlichen Größen betrachtet, so dass

$$m \frac{d^2}{dt^2} y(t) + k \cdot (y(t) - x(t)) - F(t) = 0 \quad (9)$$

entsteht. Weiterhin folgt aus Gleichung (6), dass für die Federkraft  $F_k = k \cdot (y(t) - x(t))$  gilt, die sowohl von der Wegänderung in  $x(t)$  als auch durch  $y(t)$  abhängt. Die DGL zweiter Ordnung wird nun durch die Anwendung der Laplace-Transformation in eine lineare, einfach zu lösende Gleichung überführt:

$$s^2 \cdot m \cdot Y(s) + k \cdot Y(s) = F(s) + k \cdot X(s). \quad (10)$$

Je nach Anwendung ergeben sich nun zwei Übertragungsfunktionen. Die Bewegungsübertragungsfunktion

$$B(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{s^2 \cdot m + k} \quad (11)$$

für den Fall, dass die Halterung bewegt wird, also  $F(t) = 0$ , sowie die Kraftübertragungsfunktion

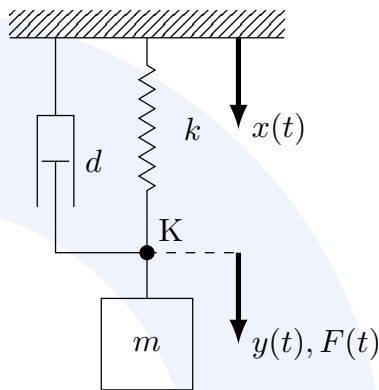
$$Z(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 \cdot m + k} \quad (12)$$

mit  $X(s) = 0$ , entstehen jeweils durch Null-Setzen der entsprechenden Anregungskräfte.

Die Übertragungsfunktionen in der Systemtheorie sind überwiegend rationalgebrochene Funktionen mit Null- und Polstellen. Letztere führen zur Eigenkreisfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  des betrachteten Systems, in dem der Nenner nullgesetzt wird.

### 3.2. Gedämpfter Feder-Masse-Schwinger

Entsprechend der skizzierten Vorgehensweise über die Netzwerkanalyse wird die Anordnung um ein weiteres Element erweitert. Parallel zu Feder  $k$  wird ein Dämpfer  $d$  vorgesehen, vergleiche dazu Abbildung 4a. Technisch entspricht dies dem Beitrag der Reibung innerhalb der Feder oder einem echten Dämpferelement, wie zum Beispiel in einem Stoßdämpfer.



a) Physikalisches Schema

Abbildung 4: Feder-Masse-Schwinger, mit der Masse  $m$ , der Feder  $k$  und der Dämpfung  $d$ . Die Quellen  $F(t)$  und  $x(t)$  regen das System an.

Der Ruhezustand (Anfangsbedingungen) berechnet sich identisch zu Abschnitt 3.1, so dass sofort mit der dynamischen Analyse begonnen werden kann. Aus der Netzwerkanalyse, siehe Abbildung 4b geht die Knotengleichung

$$Y(s) + k \cdot Y(s) = F(s) + s \cdot d \cdot X(s) + k \cdot X(s) \quad (13)$$

hervor. Durch Nullsetzen der Anregungsgrößen folgen

$$B(s) = \frac{s \cdot d + k}{s^2 \cdot m + s \cdot d + k} \quad (14)$$

$$\text{sowie } Z(s) = \frac{1}{s^2 \cdot m + s \cdot d + k} \quad (15)$$

als Übertragungsfunktionen entsprechend. Die Analyse der Polstellen durch Nullsetzen des Nenners, liefert zunächst

$$0 = s^2 + \frac{d}{m} \cdot s + \frac{k}{m} = s^2 + 2\delta + \omega_0^2 \quad (16)$$

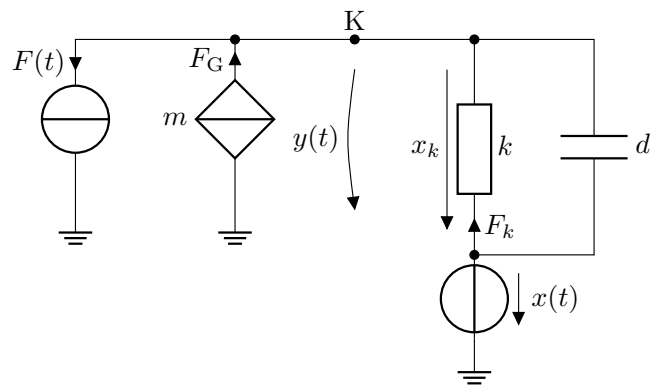
mit  $\delta$  als Abkling- oder Dämpfungskonstante. Die Lösung der quadratischen Gleichung liefert

$$s_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (17)$$

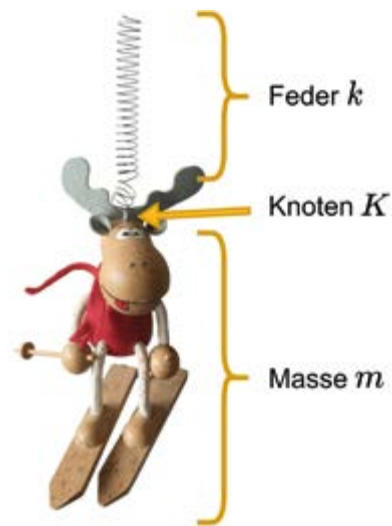
$$= -\delta \pm j\omega_d \quad (18)$$

$$\text{mit } \omega_d = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - D^2}. \quad (19)$$

Hier bezeichnet  $\omega_d$  die Eigenkreisfrequenz, auch als Lehr'sche Dämpfung bezeichnet, welche vom Dämpfungsmaß  $D = \delta/\omega_0$  abhängt. Entsprechend der Gestalt von  $D$  ergeben sich verschiedene Fälle für die Dämpfung: (i)  $D = 0$ , keine Dämpfung; (ii)  $D = 1$ , aperiodischer Grenzfall; (iii)  $0 < D < 1$  gedämpfte Schwingung; (iv)  $D < 0$  instabiles System, exponentielles Anwachsen der Amplitude; (v)  $D > 1$  Kriechfall.



b) mechanisches Netzwerk im System  $F$ - $x$



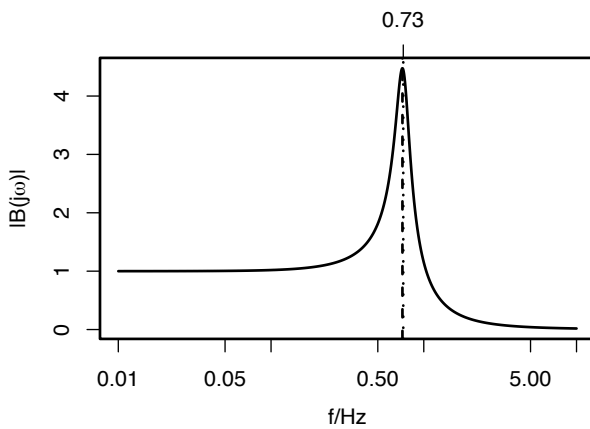
c) reales mech. System

Das skizzierte System heißt auch „harmonischer Oszillator“ und wird in vielen physikalischen und technischen Bereichen herangezogen. Die Rücktransformation in den Zeitbereich ist komplex und wird hier nicht weiter besprochen. Im Fokus stehen die Aussagen, die sich aufgrund der Analogiebetrachtung ziehen lassen.

#### Praxisbeispiel

Die Elch-Figur an einer Spiralfeder aus Abbildung 4c, ein klassisches Spielzeug, soll als Praxisbeispiel einer schwachgedämpften Schwingung dienen.

Abbildung 4 zeigt das System von der physikalischen Anordnung (Elch-Figur) über das mechanische Schema, bis zum „elektrischen“ Netzwerk, der Analogiebetrachtung. Experimentell wurden die Periodendauern mehrerer Schwingungen mit der Stoppuhr gemessen und eine experimentelle Frequenz von  $f_{exp} = 0.73$  Hz bestimmt. Sie beschreibt das gedämpfte System. Die übrigen Parameter wurden wie folgt ermittelt:  $m = 0.094$  kg und  $k = 2$  N/m. Die Dämpfung der Feder ist hier nur ein Schätzwert von  $d \approx 0.1$  Ns/m.



a) Physikalisches Schema

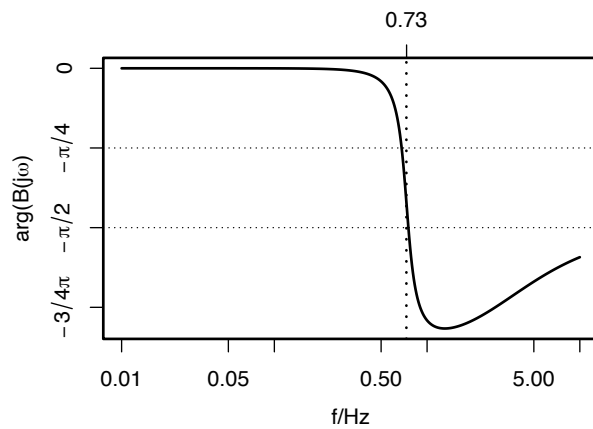
b) mechanisches Netzwerk im System  $F-x$ 

Abbildung 5: Amplituden- und Phasengang

Gemäß der Netzwerkanalyse des ungedämpften Federschwingers lässt sich eine Eigenfrequenz von  $f_0 > f_{exp}$  ableiten, das mit den theoretischen Vorbetrachtungen konsistent ist. Im Falle der gedämpften Schwingung nähert sich die berechnete Frequenz  $f_a \approx f_{exp}$  an. Die minimale Dämpfung ist für solche Spielzeuge zu erwarten, da sie bereits durch geringste Anregungen mit ihrer Eigenfrequenz anfangen zu schwingen.

Frequenz		
$f_0/\text{Hz}$	$f_a/\text{Hz}$	$f_{exp}/\text{Hz}$
0,734	0,729	0,73

Tabelle 3: Frequenzen des Praxisbeispiels

Zur tiefergehenden Analyse solcher Systeme stehen zahlreiche Methoden zur Verfügung, die Aspekte wie Stabilität, charakteristische Frequenzen, Dämpfung, Frequenzgang und mehr untersuchen. Der Fokus liegt nachfolgend auf dem Amplituden- und Phasengang des Systems bei Anregung der Halterung. Gesucht sind somit  $A(\omega) = |B(j\omega)|$  und  $\varphi(\omega) = \arg B(j\omega)$ , wobei für die komplexe Variable  $s = j2\pi f$  gilt.

Der Amplitudengang aus Abbildung 5a zeigt ein ausgeprägtes Maximum von  $|B(j2\pi f_a)| \approx 4.36$  bei  $f_a \approx 0.73$  Hz auf, das mit der Polstelle aus Gleichung (17) korrespondiert. Dieser Wert gibt die Intensität der Reaktion auf eine geringe Anregung an der Halterung an. Im Phasengang zeigt sich zudem eine signifikante Verschiebung, im Frequenzbereich mit der Bedingung  $|B(s)| > 1$ , siehe Abbildung 5b. Diese Änderung der Phasenlage beschreibt die Verschiebung zwischen dem Ort  $y(t)$  und der Anregung  $x(t)$ . Aus dem Verlauf von Amplituden- und Phasengang lassen sich darüber hinaus Rückschlüsse auf die Systemstabilität ziehen.

#### 4. Zusammenfassung

Die Arbeit erläutert den Einsatz der Netzwerkanalyse zur Modellierung physikalischer Systeme mithilfe elektro-mechanischer Analogien am Beispiel eines Feder-Masse-Schwingers. Diese Methode wird in Disziplinen wie der Elektrotechnik, Mechanik und Thermodynamik genutzt, um der wachsenden Komplexität bei der interdisziplinären Entwicklung von Produkten und Anwendungen gerecht zu werden. Mit systemübergreifenden Analysen können bspw. Energieflüsse verbessert, Bauteile funktionspezifisch ausgelegt oder Parameter optimiert werden.

Im Zentrum steht dabei das Konzept konzentrierter Elemente, welche das Verhalten komplexer Strukturen durch idealisierte, punktuelle Bauteile abbilden und zu Netzwerken kombiniert werden können.

Ein Schwerpunkt liegt auf der Anwendung von Methoden aus der Systemtheorie, welche das Verhalten des vorliegenden mechanischen Systems – der Elch-Figur – beschreiben. Ebenso wurden Übertragungsfunktionen zur Analyse von Frequenzantworten ermittelt und systematisiert. Im Ergebnis passen die experimentell ermittelten Werte der Eigenfrequenz und die rechnerisch ermittelten Werte zusammen, was den Nutzen dieser Methoden nachdrücklich untermauert.

#### Literaturverzeichnis

- [1] Ballas, Rüdiger Gregor, Günther Pfeifer, und Roland Werthschützky (2009): Elektromechanische Systeme der Mikro-technik und Mechatronik: dynamischer Entwurf – Grundlagen und Anwendungen. 2. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-89320-2>.
  
- [2] Busch-Vishniac, Ilene J. (1999): Electromechanical sensors and actuators. Mechanical engineering series. New York: Springer.
  
- [3] Cauer, Wilhelm (1954): Theorie der linearen Wechselstromschaltungen. Berlin: Akademie Verlag.
  
- [4] Doetsch, Gustav (1976): Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. 3. Aufl. Bd. 24. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiet der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe. Basel: Birkhäuser Basel. <http://link.springer.com/10.1007/978-3-0348-5188-6>.
  
- [5] Hoffmann, Rüdiger (1998): Signalanalyse und -erkennung: eine Einführung für Informationstechniker. Berlin; Heidelberg: Springer.
  
- [6] Kämpf Müller, Karl (1952): Die Systemtheorie der elektrischen Nachrichtenübertragung. Stuttgart: S. Hirzel-Verlag.
  
- [7] Lenk, Arno, Günther Pfeifer, und Roland Werthschützky (2001): Elektromechanische Systeme: mechanische und akustische Netzwerke, deren Wechselwirkungen und Anwendungen. Berlin Heidelberg: Springer.
  
- [8] Lunze, Klaus (1991): Theorie der Wechselstromschaltungen. 8. Aufl. Berlin: Verl. Technik.